Zubía 37-38 129-148 Logroño 2020-2021

TEOREMAS DE REORDENAMIENTO DE SERIES*

MANUEL BELLO HERNÁNDEZ[1*]
ALEJANDRO MAHILLO CAZORLA[2]

RESUMEN

La suma de una cantidad infinita de números reales puede depender del orden en el que se sumen los números. En este trabajo hacemos un recorrido por varios resultados que involucran reordenamiento de los términos de una serie, desde series en $\mathbb{R}$ hasta en espacios de Banach pasando por los euclidianos ($\mathbb{R}^n$). No incluimos demostraciones de los teoremas, solo las ideas básicas de éstas.

Primero vemos el caso de las series de números reales, donde presentamos el teorema de reordenamiento de Riemann junto con otros resultados. Continuaremos con el teorema de Lévy-Steinitz, un resultado análogo al de Riemann para series de vectores en $\mathbb{R}^n$. En particular, consideraremos la serie de Eisenstein, definida en los complejos, que tiene la propiedad de que al reordenar sus términos obtenemos un cambio en el valor de su suma; esta serie es útil al estudiar formas modulares. Por último, presentamos el teorema de Pechersky sobre reordenamiento de series en espacios de Hilbert, un resultado útil para probar la universalidad de la función ζ de Riemann.

Palabras clave: sucesiones, series, reordenamiento de series, convergencia absoluta, convergencia condicional, convergencia incondicional, sumabilidad, espacio de Banach, espacio de Hilbert.

* Registrado el 12 de febrero de 2020. Aprobado el 19 de enero de 2021.

1. Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, C/ Madre de Dios, 53, Edicio CCT, 26006 Logroño. * E-mail: mbello@unirioja.es

2. Universidad de La Rioja, C/Madre de Dios, 53, Edicio CCT, 26006 Logroño. E-mail: alejandro.mahillo@alum.unirioja.es

La investigación del primer autor ha sido subvencionada parcialmente por el 'Ministerio de Economía y Competitividad', Proyecto MTM2014-54043-P.

The sum of an infinite number of real numbers can depend on the arranging of these numbers. In this paper we will take you through several results about rearranging the terms of series; from series of real numbers to series in $\mathbb{R}^n$; even results about series in Banach spaces. We do not include proofs of theorems but only their main ideas.

First, we study the real numbers series case, in which we see the Riemann rearrangement theorem together with other results. We will continue with the Lévy-Steinitz theorem, an analogous result of Riemman's theorem for vector series in $\mathbb{R}^n$. In particular, we will consider the Eisenstein series defined in the complex field. Also, this series has the property that rearrangement in the order of summations results in a predictable change in the value of the series. This series is useful in the study of modular form. Finally, we show Pechershy's theorem on rearrangement of series in Hilbert spaces.

Key words: *sequences, series, rearrangements of series, absolutely convergence, conditional convergence, unconditional convergence, summability, Banach space, Hilbert space.*

1. INTRODUCCIÓN

La suma de números reales es conmutativa, pero esto no es válido, en general, cuando sumamos una cantidad infinita de números reales. Este hecho paradójico es el teorema de reodenamiento de Riemann que veremos en este trabajo y muestra el difícil tránsito a lo infinito del conocimiento matemático. Se debe tener en cuenta que el estudio del movimiento u otros procesos infinitos, ha llevado a cuestiones paradójicas desde los tiempos de los griegos, como atestiguan, por ejemplo, las paradojas de Zenón. Los resultados sobre reordenamiento de series permiten hacer un repaso por la evolución de las matemáticas.

Este trabajo está dedicado a presentar resultados sobre reodenamiento de series, tanto de números reales, como de vectores en espacios euclidianos de dimensión finita y en espacios de Hilbert y de Banach. No incluimos demostraciones, solo las ideas fundamentales de éstas. Buena parte del contenido de este artículo aparece en el Trabajo de fin de grado de su segundo autor (Mahillo Cazorla 2019), realizado bajo la dirección del primer autor. Recomendamos que aquel lector que quiera profundizar en el tema tratado aquí consulte dicho trabajo.

Al estudiar la convergencia de series hay que precisar el concepto de convergencia o límite, es decir, en qué consiste el proceso de sumar una cantidad infinita de números. A continuación recordamos algunos conceptos sobre series y con-

vergencia en un espacio normado.[1]

Definición. *Sea* (a_n) *sucesión en un espacio normado* $(X, \|\cdot\|)$. *Ella es una* ***sucesión convergente*** *a un valor* $l \in X$ *cuando,*

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n - l\| = 0.$$

En tal caso escribimos $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ *o* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *y diremos que* l *es el* ***límite*** *de* (a_n). *Si consideramos ahora una función* $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estrictamente creciente, diremos que la sucesión* $(a_{\varphi(n)})$ *es una* ***subsucesión*** *de* (a_n). *La sucesión* (a_n) *es de* ***sucesión de Cauchy*** *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n, m \geq N$ *se cumple* $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$.

También para series en espacios normados consideramos los conceptos:

Definición. *Sea* (a_n) *una sucesión en un espacio normado* $(X, \|\cdot\|)$. *La* ***serie*** *cuyo* ***término general*** *es* a_n *se denota* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; *esta expresión representa también el límite, cuando existe, de la sucesión de sus* ***sumas parciales*** (S_N), *es decir,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Si la sucesión (S_N) *converge a* S, *entonces diremos que la serie es* ***convergente*** *y su* ***suma*** *es* S. *Si la sucesión* (S_N) *no converge, diremos que es* ***divergente***. *Diremos que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es* ***absolutamente convergente*** *si* $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ *converge. Dada una biyección cualquiera de los naturales* $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *diremos que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *es un* ***reordenamiento*** *de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Una serie es* ***condicionalmente convergente*** *si converge pero no es absolutamente convergente. Una serie es* ***incondicionalmente convergente*** *si todos sus reordenamientos convergen al mismo valor. Una* ***sub-serie*** *es aquella cuyo término general es de la forma* a_{λ_n}, *donde* (λ_n) *es una sucesión de números naturales estrictamente creciente.*

Toda sucesión convergente en un espacio normado es de Cauchy. Notemos que si una serie es absolutamente convergente en un espacio de Banach[2], entonces es convergente, ya que las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tienen norma menor

1. Un ***espacio normado*** es un par $(X, \|\cdot\|)$ formado por un espacio vectorial X con cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y una función positiva $\|\cdot\|$, llamada ***norma***, definida en X, que cumple las tres propiedades siguientes: la ***desigualdad triangular***, o sea, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$; es ***homogénea***, $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ para todo λ en el cuerpo asociado a X y $x \in X$; y $\|x\| = 0$ entonces $x = 0$.
2. Un ***espacio de Banach*** es un espacio normado en el que toda sucesión de Cauchy es convergente.

Zubía | núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148
ISSN 0213-4306

que las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ por la desigualdad triangular. También podría suceder que una serie convergiese, pero que no fuese absolutamente convergente. Estos casos son los que nos interesan y es donde tendrá vital importancia el orden en el que se sume, es decir, el reordenamiento que se escoja.

En la siguiente sección presentamos el teorema de reordenamiento de Riemann para series de números reales y hacemos un recorrido histórico por diferentes resultados sobre reodenamiento de series de números reales. En la sección 3 incluimos resultados sobre reordenamiento de series de vectores en espacios euclidianos, en particular enunciamos el teorema de Lévy-Steinitz. La sección 4 contiene resultados sobre la serie de Eisenstein G_2 y un teorema de Romik-Scherer que se refiere a los efectos de reordenamientos en la serie de Eisenstein. La última sección está dedicada a series en espacios de Hilbert y de Banach. En este contexto se sitúa el teorema de Dvoretzky-Rogers de dicha sección, que conecta las características algebraicas de un espacio de Banach (su dimensión) con la convergencia incondicional de las serie en dicho espacio. En esa última sección también estudiamos el teorema de Pechersky sobre convergencia condicional de series en espacios de Hilbert.

2. TEOREMA DE REORDENAMIENTO DE RIEMANN

En esta sección consideramos series de números reales, $\mathbb{R}$. En 1833 Augustin Louis Cauchy observó (Cauchy 1833) que una serie convergente de números reales cuyos términos no son todos positivos podía contener una subserie divergente. En 1837 Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet presentó (Dirichlet 1837) las siguientes series

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

y

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots,$$

el primer caso corresponde a la serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ y la segunda contiene los mismos términos, pero primero se suman 2 positivos y luego uno negativo, es decir, la segunda es un reordenamiento de la primera. Además, el valor al que convergen ambas series es distinto, el valor de la primera serie es $\log 2$, mientras que el valor de la segunda es $\frac{3}{2} \log 2$. Para calcular la primera serie presentamos un argumento que no hace uso del desarrollo de MacLaurin de $\log(1 + x)$.

Zubía | núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148
ISSN 0213-4306

Por inducción, es fácil probar la primera de las siguientes identidades

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$
$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\log 2,$$

mientras que la tercera expresión es una suma de Riemann[3] de la integral elemental $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \log 2$.

Para sumar la segunda serie calculamos sus sumas parciales S_n. La suma parcial S_{3m} tiene $2m$ valores positivos y m negativos y viene dada por la siguiente expresión,

$$S_{3m}=\sum_{k=1}^{2m}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k}=\left(\sum_{k=1}^{4m}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{2m}\frac{1}{2k}\right)-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k}.$$

Si en cada una de las tres últimas sumas utilizamos la siguiente relación

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\log n+\gamma+o(1)\text{ cuando }n\to\infty,$$

donde γ representa la constante de Euler,[4] obtenemos $\lim_{m\to\infty} S_{3m} = \frac{3}{2}\log 2$. Como además $S_{3m+1} = S_{3m} + \frac{1}{4m+1}$ y $S_{3m-1} = S_{3m} - \frac{1}{2m}$, tenemos que S_{3m+1} y S_{3m-1} tienen el mismo límite que S_{3m} cuando $m \to \infty$. Por tanto, concluimos que el valor de nuestra serie es $\frac{3}{2}\log 2$. Para ver más detalles consultar (Apostol 1967) y para otra demostración (Cowen *et al.* 1980).

Dirichlet además probó que si una serie es absolutamente convergente, entonces cualquier reordenamiento de ésta converge al mismo valor.

En 1854 Georg Friedrich Bernhard Riemann demostró que la suma de las series de números reales condicionalmente convergentes depende del orden en el que se sumen sus términos (Riemann 1854)[5]. Más precisamente:

3. Si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ es una función y $x_{0,n} < x_{1,n} < \ldots < x_{n,n}$ es una partición del intervalo $[a, b]$; es decir, $x_{0,n} = a$ y $x_{n,n} = b$, si para cada $j = 1, 2, \ldots, n$ elegimos $\zeta_{j,n} \in [x_{j-1,n}, x_{j,n}]$, entonces $\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_{j,n})(x_{j,n} - x_{j-1,n})$ es una suma de Riemann correspondiente a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$. Se sabe que f es Riemann-integrable en $[a, b]$ si el límite de las sumas de Riemann convergen cuando la norma de la partición converge a cero, esto es, $\text{máx}\{|x_{j,n} - x_{j-1,n}| : 1 \le j \le n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. No confundir con el número de Euler, *e*. La sucesión $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n)$ es monótona decreciente y acotada inferiormente; su límite define a la constante de Euler, γ. No se sabe si este número es racional o irracional.

Zubía | *núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148*
ISSN 0213-4306

Teorema (Riemann). *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números reales condicionalmente convergente.*

i) *Dado un número real c, hay un reordenamiento de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cuya suma es c.*

ii) *Existen reordenamientos tales que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\beta(n)} = -\infty$.*

La demostración de este resultado depende del hecho que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge condicionalmente, entonces sus correspondientes series de términos positivos y negativos divergen; de modo que tomando alternativamente grupos de sumandos de una y de otra podemos ir superando o quedándonos por debajo de un valor previamente fijado. Otra forma alternativa de presentar el teorema de reordenamiento de series de Riemann es la siguiente: *el conjunto de las sumas de todos los reordenamientos convergentes de una serie de números reales es el conjunto vacío, un único punto o toda la recta real*. En (Apostol 1974, p. 197) se puede ver una demostración detallada de este teorema.

Hay varios trabajos clásicos que se desarrollaron alrededor del teorema de reordenamiento de series de Riemann. Ohm y Schlömilch estudiaron el efecto de los reordenamientos en la serie armónica (2) cuando p términos positivos están seguidos por q negativos en el reordenamiento (Ohm 1839, Schlömilch 1873). Pringsheim estudió esta situación para series condicionalmente convergentes generales (Pringsheim 1883). Él probó el siguiente resultado:

Teorema (Pringsheim). *Sea (a_n) una sucesión de números reales decreciente con límite cero tal que*

$$\lim_{n\to\infty} na_n = g > 0. \tag{1}$$

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma(n)}$ un reordenamiento de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ tal que en los primeros n términos del reordenamiento hay p_n términos positivos y m_n términos negativos. Supongamos, además, que $v_n = p_n - m_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} m_n = \infty$ y existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{m_n} =: k,$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n + \frac{g}{2}\log k.$$

5. Este resultado aparece publicado por primera vez en la tesis de habilitación de Riemann para ser profesor auxiliar, defendida en Leipzig en 1854. En ella estudiaba las condiciones para que una función pudiera ser representada mediante su serie de Fourier.

Las ideas centrales en la prueba de este resultado son las siguientes. Se tiene la identidad

$$\sum_{j=1}^{n} b_{\sigma(j)} = \sum_{j=1}^{2m_n} (-1)^{j-1} a_j + a_{2m_n+1} + a_{2m_n+3} + \ldots + a_{2p_n-1}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N(\varepsilon)$

$$\frac{g-\varepsilon}{n} \leq a_n \leq \frac{g+\varepsilon}{n}$$

y $\frac{1}{2m_n+1} + \frac{1}{2m_n+3} + \ldots + \frac{1}{2p_n-1}$ es equivalente[6] a $\int_{m_n}^{p_n} \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2} \log \frac{p_n}{m_n}$ cuando n tiende a infinito. De donde se deduce que al hacer el reordenamiento la suma se altera una cantidad contenida entre los valores $(g \pm \varepsilon) \log k$. En el mismo artículo Pringsheim estudió los casos cuando el límite en (1) es cero o infinito.

Posteriormente, Wacław Franciszek Sierpiński probó (Sierpiński 1911) que si $s' < s$, siendo s la suma de una serie condicionalmente convergente, entonces es posible reordenar los términos positivos de dicha serie, manteniendo en su posición a los términos negativos de modo que la serie reordenada sume s'. Cuando $s'' > s$, reordenando los términos negativos, se obtiene s''. La idea fundamental para la prueba de este resultado es que una serie de términos positivos que diverge, cuyo término general converge a cero se puede reordenar de modo que sus sumas parciales no sean más rápidas que cualquier sucesión estrictamente monótona creciente de términos positivos fijada.

En los años 50, Bagemihl y Erdős estudiaron (Bagemihl y Erdős 1954) los efectos de los reodenamientos de series en la sumabilidad Cesàro. Recientemente, Dybskiy y Slutsky (2011) consideran este tipo de problema con otras formas de convergencia.

3. SERIES DE VECTORES

La extensión del teorema de Riemann a series de números complejos la realizó Paul Lévy en 1905 (Lévy 1905). En ese mismo trabajo aparece un intento de demostración en espacios euclidianos de dimensión mayor, pero en 1913, Ernst Steinitz observó (Steinitz 1913) que la demostración de Lévy estaba incompleta en los casos de dimensión mayor o igual que 3 y presentó una demostración correcta con un enfoque completamente distinto.

6. El límite del cociente de estas sucesiones es 1.

Zubía | núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148
ISSN 0213-4306

Teorema (Lévy-Steinitz). *El conjunto de sumas de los reordenamientos convergentes de una serie de vectores en un espacio euclídeo real de dimensión finita es, o bien el vacío, o bien el trasladado de un subespacio.*[7]

La demostración de Steinitz fue modificada por Wilhelm Groß (Groß 1917). La prueba de Groß es muy técnica. A continuación presentamos los tres pasos básicos de una demostración más transparente de Peter Rosenthal (Rosenthal 1987).

A lo largo de esta sección vamos a considerar la norma euclidiana. Se sabe que en un espacio euclidiano de dimensión finita todas las normas son equivalentes y las topologías asociadas a dichas normas coinciden.

Primero, se prueba el "teorema de confinamiento poligonal" de Groß (Groß 1917), que afirma que una familia arbitraria finita de vectores con longitud menor o igual que 1, que suman 0, puede ser reordenada de tal forma que la norma de las sumas parciales sea menor que cierta constante que solo depende de la dimensión del espacio; es decir,

Teorema (confinamiento poligonal). *Sea* $\{v_i : i = 1, ..., m\}$ *una familia finita de vectores en* $\mathbb{R}^n$ *cuya suma es 0 y* $\|v_i\| \leq 1$ *para todo* $i = 1, ..., m$. *Entonces, existen una constante* C_n, *que depende sólo de n, y una permutación P de* $\{2, ..., m\}$ *con la propiedad de que*

$$\left\| v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)} \right\| \leq C_n$$

para todo j. Además, podemos tomar $C_1 = 1$ *y* $C_n \leq \sqrt{4C_{n-1}^2 + 1}$ *para cada* $n > 1$.

La prueba de este teorema de confinamiento se hace por inducción en la dimensión del espacio, para reducir el caso de dimensión n al de dimensión $n-1$, se considera el vector L no nulo que tiene norma máxima dentro de todos los vectores que se obtienen sumando al vector v_1 otros vectores de la familia $\mathcal{U} := \{v_i : i = 2, ..., m\}$; el espacio

$$L^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, L \rangle = 0\},$$

tiene dimensión $n - 1$. Los vectores de la familia $\mathcal{U}$ se dividen en dos grupos, los (u_j) que forman con L un ángulo menor de 90° (que sumados a v_1 dan L) y los

7. Es decir, conjuntos de la forma $v + M$, donde v es un vector y M es un subespacio lineal del espacio euclidiano considerado.

Zubía | núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148
ISSN 0213-4306

(w_j) que forman un ángulo mayor o igual que 90° con L. Denotemos por v' la proyección del vector v en $L^{\perp}$, en otras palabras,

$$v' = v - \frac{\langle v, L\rangle}{\|L\|^2} L \qquad \text{y} \qquad \|v'\|^2 + |\langle v, L\rangle|^2 = \|v\|^2.$$

Es fácil observar que las proyecciones (u'_j) y (w'_j) cumplen las hipótesis para aplicar la inducción, en particular, la norma de dichas proyecciones tienen módulo ≤ 1. La figura 1 tiene una ilustración de la idea central de la demostración descrita anteriormente.

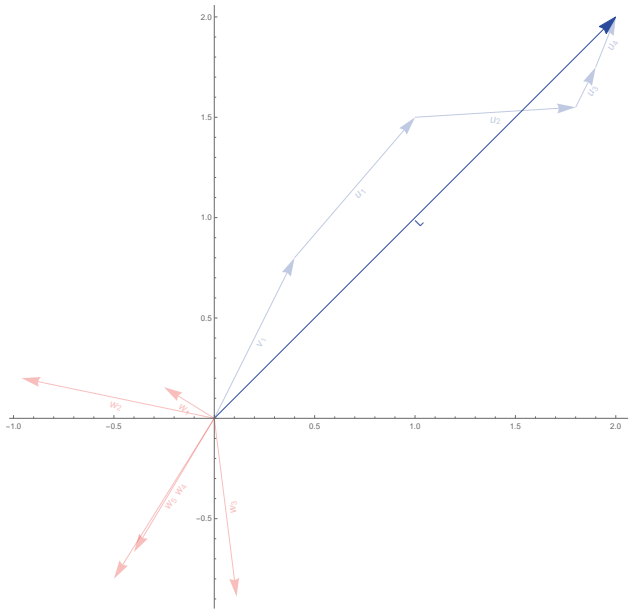


Figura 1: En azul oscuro tendríamos el vector L. En azul más claro tenemos los vectores $\{u_i\}$ dispuestos uno tras otro y en rojo más claro tenemos los vectores $\{w_i\}$.

El segundo paso en la prueba del teorema de Lévy-Steinitz es la prueba del "teorema de reordenamiento":

Teorema (reordenamiento). *Si una subsucesión de una sucesión de sumas parciales de una serie de vectores en $\mathbb{R}^n$ converge a S, y el término general de la serie converge a 0, entonces existe un reordenamiento de ella cuya suma es S.*

Si (v_k) es una sucesión de vectores en $\mathbb{R}^n$ que converge al vector nulo y $S_m = \sum_{k=1}^{m} v_k$ es la suma parcial de orden m, entonces de las hipótesis del teorema existe una subsucesión (S_{m_k}) tal que $\lim_{k\to\infty} S_{m_k} = S$. La idea fundamental para

Zubía | núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148
ISSN 0213-4306

la prueba del teorema de reordenamiento es reordenar las "lagunas" de vectores $(v_{m_k+1}, ..., v_{m_{k+1}-1})$ que quedan entre dos sumas parciales convergentes a S, que no son muy grandes en norma por la convergencia a cero de los vectores, utilizando el teorema de confinamiento poligonal.

El tercer paso de la prueba del teorema de Lévy-Steinitz es probar que el conjunto de las sumas es una variedad afín. Denotemos por $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las sumas de reordenamientos convergentes de la serie considerada. Se considera la situación no trivial $\mathcal{S} \neq \emptyset$ y también que $0 \in \mathcal{S}$ porque el caso general $(0 \notin \mathcal{S})$ se reduce trivialmente al anterior. El guión que se sigue para probar que si 0, s_1 y s_2 están en $\mathcal{S}$, entonces $s_1 + s_2 \in \mathcal{S}$ es el siguiente. Se toma una sucesión (ε_m) de números positivos que converge a 0. Se selecciona una suma parcial de $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$, en cierto orden, para que esté a una distancia ε_1 de s_1. Después construimos una suma parcial que contenga todos los vectores ya usados (siempre las sumas parciales seleccionadas incluirán a los términos ya utilizados) y que esté a una distancia ε_1 de 0 y después otra suma parcial con los vectores ya usados cuyo valor esté a una distancia ε_1 de s_2. Después formamos otra suma parcial que esté a distancia ε_2 de s_1, otra que esté a una distancia ε_2 de 0 y otra a una distancia ε_2 de s_2 y así sucesivamente. Los vectores usados entre una suma cercana al 0 y la siguiente suma cercana a s_2 sumarán aproximadamente s_2. Adicionándolos con los vectores cuya suma estaba cercana a s_1 y cercana a 0 tendremos sumas parciales cercanas a $s_1 + s_2$. Utilizando el teorema de reordenamiento se finaliza la prueba.

Para probar que si $s \in \mathcal{S}$, entonces $ts \in \mathcal{S}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, se reduce la prueba al caso $t \in (0, 1)$, $t = -1$ y después se utiliza el teorema de confinamiento poligonal para completar la prueba.

4. SERIE DE EISENSTEIN G_2

Por lo general, los ejemplos para ver el efecto del reordenamiento en series que no son absolutamente convergentes parecen casos muy concretos, que no nos encontraríamos en la práctica matemática. Aquí estudiaremos la serie de Eisenstein G_2 que aparece en el estudio de formas modulares (Apostol 2012). La función G_2 es la función holomorfa en el semiplano superior $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ definida de la siguiente forma:

$$G_2(\tau) := \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n + m\tau)^2} \right), \tag{2}$$

Zubía | núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148
ISSN 0213-4306

con $(m, n) \in \mathbb{Z}$, excepto para $(m, n) = (0, 0)$. Esta serie se debe entender de la siguiente forma,

$$G_2(\tau) := 2\zeta(2) + \lim_{M\to\infty} \lim_{N\to\infty} \sum_{0<|m|\leq M} \sum_{|n|\leq N} \frac{1}{(n+m\tau)^2}, \tag{3}$$

donde $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ representa el valor de la función zeta de Riemann en 2. La serie (2) no converge absolutamente ya que la integral

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{(x+ys)^2 + (yt)^2}\, dx\, dy$$

diverge para cualquiera sean $t > 0$ y $s \in \mathbb{R}$.

Al cambiar el orden de sumación en (2) se tiene el siguiente resultado.

Lema. *Se cumple que,*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}{}' \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+m\tau)^2} \right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+m\tau)^2} \right) - \frac{2\pi i}{\tau}, \tag{4}$$

donde en ambas series se excluye el término $(m, n) = (0, 0)$*, donde* $\sum'$ *significa que la suma se hace para valores distintos de cero en el índice.*

Esto es, el cambio en el orden de sumación (2) da lugar a un cambio en el valor de la serie dado por el "término residual" $-\frac{2\pi i}{\tau}$. La identidad (4) aparece de forma natural cuando uno considera la serie de Eisenstein bajo la transformación $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ ya que ella es equivalente a

$$\tau^{-2} G_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = G_2(\tau) - \frac{2\pi i}{\tau}.$$

Para la prueba de (4) se utilizan las siguientes fórmulas de descomposición en fracciones simples de $\cot(\cdot)$ y $\frac{1}{\operatorname{sen}(\cdot)}$,

$$\frac{1}{u} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \left(\frac{1}{u+k} - \frac{1}{k} \right) = \pi \cot(\pi u), \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(u+k)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi u)},$$

conocidas de los cursos básicos de Análisis complejo, que se obtienen con técnicas de teoría de residuos, o del Análisis real y funcional, donde se utilizan desarrollos de Fourier. Estas fórmulas son válidas para $u \in \mathbb{H}$ y permiten obtener

$$\begin{aligned}\varphi(z,\tau) &:= \frac{1}{z} + \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z+m\tau+n} - \frac{1}{m\tau+n} + \frac{z}{(m\tau+n)^2} \right) \\ &= \frac{z\pi^2}{3} + \pi\cot(\pi z) + \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ m\neq 0}} \left(\pi\cot(\pi(m\tau+z)) - \pi\cot(\pi m\tau) + \frac{\pi^2 z}{\operatorname{sen}^2(\pi m\tau)} \right),\end{aligned}$$

Zubía | núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148
ISSN 0213-4306

donde $\tau \in \mathbb{H}$ y $z \in \mathbb{C}\backslash\Lambda$, con $\Lambda := \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$. Es fácil deducir que

$$\varphi_1(\tau) := \frac{i}{2\pi}\varphi\left(\frac{1}{2}, \tau\right) = \frac{\pi i}{12} + \frac{\pi i}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\pi m\tau)},$$

y

$$\frac{1}{\tau^2}\varphi_1\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \varphi_1(\tau) + \frac{1}{2\tau},$$

que equivale a (4).

Si nos fijamos en (3), para hallar G_2 sumamos considerando los (m, n) contenidos en un rectángulo centrado en el 0 y de lados M y N, de alto infinito y ancho "cero", que después se va "ensanchando". ¿Podríamos sumar pensando en los pares contenidos dentro de un círculo? ¿Y dentro de cualquier figura?

Denotemos por $\mathcal{K}$ la clase de conjuntos compactos $K \subset \mathbb{R}^2$ que son convexos, con interior distinto del vacío y simétricos respecto a x e y. Comenzamos dando varias definiciones clave. Para cada $K \in \mathcal{K}$, definimos h_K como la función real cuya gráfica es el contorno superior del conjunto K; es decir, h_K es

$$h_K : [-A, A] \to \mathbb{R}, \quad h_K(x) := \max\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in K\},$$

donde $A = \max\{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R},\ (x, y) \in K\}$. Notemos, además, que h_K es de soporte compacto $[-A, A]$; es par, por ser K simétrico respecto al eje y y su reflexión $-h_K$ es el contorno inferior de K, ya que K es simétrico respecto al eje x. La siguiente definición generaliza la de serie de Eisenstein G_2.

Definición. *Si $K \in \mathcal{K}$, denotamos por $G_2(K, \tau)$ la K-suma de la serie de Eisenstein de orden 2, es decir,*

$$G_2(K, \tau) := \lim_{\lambda\to\infty}{\sum_{(m,n)\in((\lambda K)\cap\mathbb{Z}^2)}}' \frac{1}{(m\tau + n)^2}, \quad \tau \in \mathbb{H}, \tag{5}$$

asumiendo que el límite existe.

Para escribir menos, escribimos $\sum_K a_{m,n}$ para una serie en dos índices que se suma según el método seguido en (5). En (Romik y Scherer *preprint*) se obtiene el siguiente resultado que generaliza (4).

Teorema (Romik-Scherer). *Dado $\tau \in \mathbb{H}$ y $K \in \mathcal{K}$, se tiene que $G_2(K, \tau)$ existe. Además,*

$$G_2(K, \tau) - G_2(\tau) = 4\int_0^A \frac{h_K(x)}{\tau^2x^2 - h_K^2(x)}\, dx, \tag{6}$$

donde, como antes, A denota el número para el cual h_K está soportado en $[-A, A]$.

Zubía | núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148
ISSN 0213-4306

Para dar las ideas básicas de la prueba del resultado anterior, sea

$$E(K,\tau) := G_2(K,\tau) - G_2(\tau),$$

la *función residual* asociada a K. Observar que si consideramos el caso más sencillo, es decir, cuando K es el rectángulo $[-c,c]\times[-1,1]$ con $c>0$, entonces h_K es la función indicadora $h_K(x)=\chi_{[-c,c]}(x)$. Evaluando la integral de (6) obtenemos que,

$$\begin{aligned} E(K,\tau) &= 4\int_0^c \frac{\chi_{[-c,c]}(x)}{\tau^2x^2-(\chi_{[-c,c]}(x))^2}\,dx = 4\int_0^c \frac{1}{\tau^2x^2-1}\,dx \\ &= \frac{4}{\tau^2}\int_0^c \frac{1}{x^2-\frac{1}{\tau^2}}\,dx = \frac{2}{\tau}\log\left(\frac{1-\tau c}{1+\tau c}\right), \end{aligned}$$

donde $\log\left(\frac{1-\tau c}{1+\tau c}\right)$ representa la rama analítica del logaritmo tal que $\log\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = -i\frac{\pi}{2}$.

En particular, notemos que podemos interpretar el caso límite $c\to 0$ como una suma respecto a un rectángulo infinitamente alto y estrecho (ver figuras 2 y 3), lo que significa, sumar primero respecto a n y después respecto a m como en la definición original (2) de $G_2(\tau)$. En este caso, tiene sentido pensar que la función residual sea igual a 0, de hecho $\lim_{c\to 0}\frac{2}{\tau}\log\left(\frac{1-\tau c}{1+\tau c}\right)=0$. También podemos considerar cuando $c\to\infty$, que se puede interpretar que sumamos en un rectángulo infinitamente ancho y bajo (ver figuras 4 y 5), es decir, primero sumar en m y a continuación sumar en n. En este caso tenemos que $\lim_{c\to\infty}\frac{2}{\tau}\log\left(\frac{1-\tau c}{1+\tau c}\right) = -\frac{2\pi i}{\tau}$ y de hecho es coherente con la relación (4).

La fórmula (6) sigue de la relación

$$\sum_K\left(\frac{1}{m\tau+n}-\frac{1}{m\tau+n+1}\right) = 4\int_0^A \frac{h_K(x)}{\tau^2x^2-h_K^2(x)}dx,$$

donde, en la suma de la izquierda, excluimos los sumandos tal que $m=0$. Esta igualdad se obtiene con la siguiente interpretación en términos de una suma de Riemann

$$\begin{aligned} &\sum_K\left(\frac{1}{m\tau+n}-\frac{1}{m\tau+n+1}\right) \\ &\quad= \lim_{\lambda\to\infty}\sum_{\substack{-\lambda A\le m\le\lambda A\\ m\neq 0}}\ \sum_{-\lambda h_K(m/\lambda)\le n\le\lambda h_K(m/\lambda)}\left(\frac{1}{m\tau+n}-\frac{1}{m\tau+n+1}\right) \\ &\quad= 4\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\sum_{1\le m\le\lambda A}\left(\frac{\lambda^{-1}\left\lfloor\lambda h_K\left(\frac{m}{\lambda}\right)\right\rfloor}{\lambda^{-2}m^2\tau^2-\lambda^{-2}\left\lfloor\lambda h_K\left(\frac{m}{\lambda}\right)\right\rfloor^2}\right). \end{aligned}$$

Zubía | *núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148*
ISSN 0213-4306

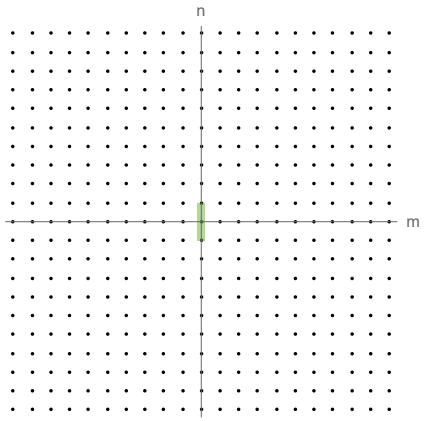


Figura 2. Primer paso, $c \to 0$.

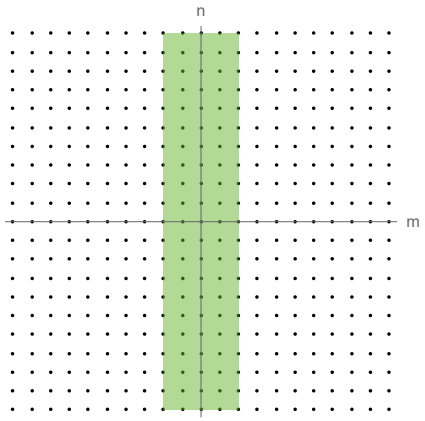


Figura 3. Siguiente paso, $\lambda \to \infty$.

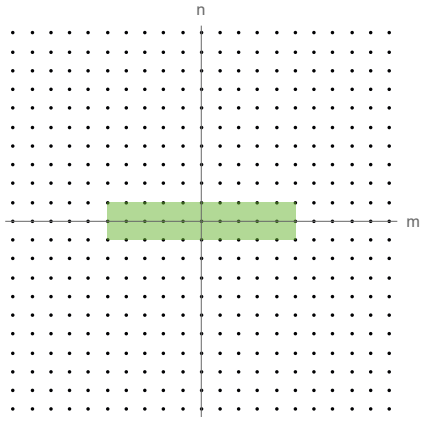


Figura 4. Primer paso, $c \to \infty$.

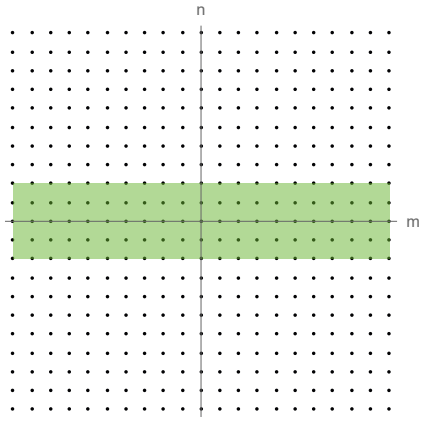


Figura 5. Siguiente paso, $\lambda \to \infty$.

5. REORDENAMIENTOS EN ESPACIOS DE HILBERT

En está sección consideramos el reordenamiento de series en espacios de Hilbert.[8] En el famoso *Cuaderno escocés* (Mauldin 1981) se formula la cuestión: ¿exis-

8. Sea $\mathcal{H}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ (que es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Un ***producto escalar*** en $\mathcal{H}$ es una función de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ en el cuerpo que a cada $(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ le asigna el valor $\langle x, y \rangle \in \mathbb{K}$ que tiene las propiedades:
   1. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}, \forall x, y \in \mathcal{H}$.
   2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in \mathcal{H}$.
   3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \forall x, y \in \mathcal{H}, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.
   4. $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in \mathcal{H}$, y la igualdad se tiene si y sólo si $x = 0$.

te algún análogo al teorema de Lévy-Steinitz en espacios de Banach de dimensión infinita? Este documento tiene mucho valor histórico, fue fruto de las reuniones que algunos de los más prometedores estudiantes de matemáticas polacos mantenían en el *Café escocés* en Lwów. Entre ellos se encontraban: Ulam, Banach, Kac, Mazur, Saks o Steinhaus. Como curiosidad, este problema, el número 106, fue propuesto por Banach y como premio regalaba una botella de vino. Fue resuelto negativamente por Józef Marcinkiewicz mediante el siguiente contraejemplo en $L^2[0,1]$.[9]

Consideremos las siguientes funciones en $L^2[0,1]$

$$f_{i,k} = \chi_{[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}]} \text{ y } g_{i,k} = -f_{i,k},$$

con $0 \leq i < +\infty$ y $0 \leq k < 2^i$ enteros y donde $\chi_{[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}]}$ representa la función que es igual a 1 en el intervalo $[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}]$ y vale 0 en $[0,1]\backslash[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}]$. Podemos ver una representación de algunas de estas funciones en las figuras 6-9. Por un lado, uno tiene,

$$(f_{0,0} + g_{0,0}) + (f_{1,0} + g_{1,0}) + (f_{1,1} + g_{1,1}) + (f_{2,0} + g_{2,0}) + \cdots = 0.$$

Por otro lado, si reordenamos como sigue, tenemos,

$$f_{0,0} + (f_{1,0} + f_{1,1} + g_{0,0}) + (f_{2,0} + f_{2,1} + g_{1,0}) + (f_{2,2} + f_{2,3} + g_{1,1}) + \cdots = 1.$$

Pero ahora, notemos que reordenando los términos siempre obtendremos funciones con valores enteros, por lo que es imposible que un reordenamiento de las $f_{i,k}$ y las $g_{i,k}$ nos dé como resultado, por ejemplo, la función $\frac{1}{2} \in L^2[0,1]$. Es decir, el conjunto de las sumas de los reordenamientos de las $f_{i,k}$ y $g_{i,k}$ no es un subespacio afín de $L^2[0,1]$.

El ejemplo anterior muestra que en los espacios de dimensión infinita son más complicados de tratar que los de dimensión finita, como corrobora el siguiente resultado (Dvoretzky y Rogers 1950).

En tal caso decimos que $\mathcal{H}$ es un ***espacio con producto escalar***; se tiene que $\|x\| = \langle x, x\rangle$ es una norma. Si $\mathcal{H}$ es un espacio con producto escalar tal que con la norma asociada es un espacio de Banach, entonces decimos que es un ***espacio de Hilbert***.

9. $L^2[0,1]$ es el espacio vectorial normado formado por las funciones f Lebesgue-medibles definidas en $[0,1]$ con valores en $\mathbb{C}$ tales que $\int_0^1 |f(x)|^2\, dx < \infty$, con la norma,

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx \right)^{1/2}, \quad f \in L^2[0,1].$$

Zubía | *núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148*
ISSN 0213-4306

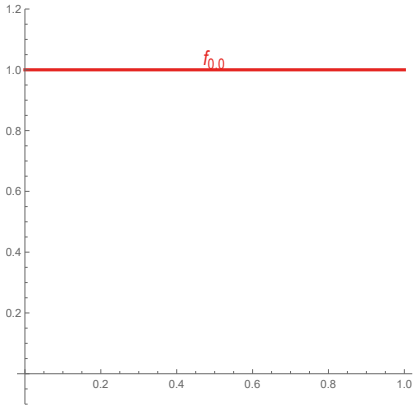


Figura 6. $f_{0,0}$ de Marcinkiewicz

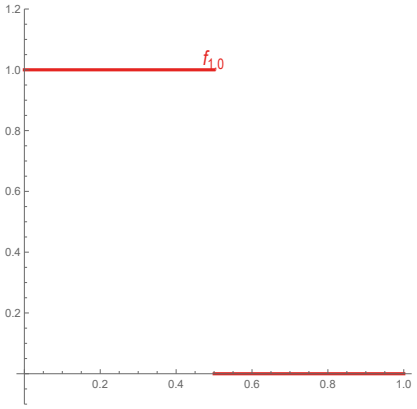


Figura 7. $f_{1,0}$ de Marcinkiewicz

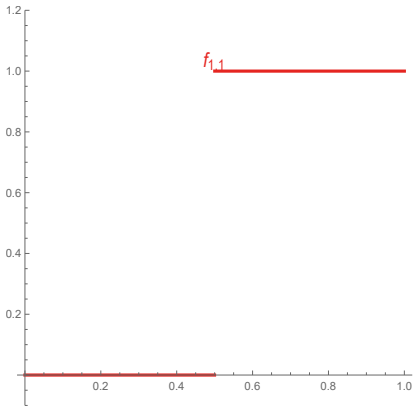


Figura 8. $f_{0,1}$ de Marcinkiewicz

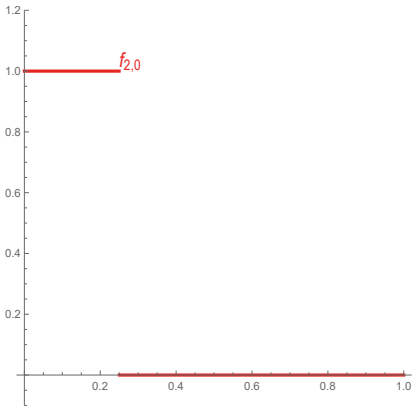


Figura 9. $f_{2,0}$ de Marcinkiewicz

Teorema (Dvoretzky-Rogers). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes en un espacio de Banach X:*

1. *Las series incondicionalmente convergentes en X convergen absolutamente.*
2. *X tiene dimensión finita.*

Este resultado está relacionado con los espacios nucleares. En (Pietsch 1972) se puede encontrar una demostración del teorema de Dvoretzky-Rogers.

En 1973, D. V. Pechersky da una versión del teorema de reordenamiento de Lévy-Steinitz en espacios de Hilbert.

Teorema (Pechersky). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert real y $(u_n)_{n\geq 1}$ una sucesión*

de vectores tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < \infty,$$

y que para todo vector unitario $e \in \mathcal{H}$, la serie $\sum_{n\geq 1} \langle u_n, e\rangle$ converge condicionalmente. Entonces, para todo $v \in \mathcal{H}$ existe una permutación σ de $\mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{\sigma(n)} = v.$$

La prueba de este resultado tiene cuatro pasos. Primero se prueba que las combinaciones lineales con coeficientes iguales a 0 o 1 de los vectores (u_j) son densos en $\mathcal{H}$. Para demostrar este hecho se usa una versión del teorema de separación de Hahn-Banach bien conocidos de Análisis funcional, que se obtiene fácilmente del teorema de la norma mínima.

Teorema (Elemento de norma mínima). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $E \subset \mathcal{H}$ un conjunto convexo, cerrado y no vacío. Entonces para todo vector $f \in \mathcal{H}$ existe $x_0 \in E$ único tal que*

$$\|f - x_0\| = \min\{\|f - x\| : x \in E\}.$$

Este elemento se caracteriza por la condición

$$\Re(\langle f - x_0, x - x_0\rangle) \leq 0, \quad \forall x \in E.$$

Corolario. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert real, un subconjunto $E \subset \mathcal{H}$ no vacío, convexo y cerrado y $f \in \mathcal{H} \setminus E$. Existe un vector unitario $g \in \mathcal{H}$ tal que para todo $x \in E$ se cumple*

$$\langle g, x\rangle \leq \langle g, f\rangle.$$

Una vez probada la densidad de las combinaciones con coeficientes iguales a 0 o 1 de los vectores (u_j), en el segundo paso se prueba que, a partir de la conclusión anterior, se tiene que dado un vector $v \in \mathcal{H}$ existe una permutación $\sigma(k)$ de los naturales tal que alguna subsucesión de las sumas parciales de $\sum_{k=1}^{\infty} u_{\sigma(k)}$ converge a v. En el tercer paso se demuestra, por inducción en la cantidad de vectores, que dado $N \in \mathbb{N}$, existe una permutación σ del conjunto $\{1, \ldots, N\}$ de modo que

$$\max_{1\leq m\leq N} \left\| \sum_{n=1}^{m} u_{\sigma(n)} \right\| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} \|u_n\|^2 \right)^{1/2} + 2 \left\| \sum_{n=1}^{N} u_n \right\|.$$

Zubía | *núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148*
ISSN 0213-4306

En el cuarto y último paso, se utiliza el segundo para probar la convergencia de subsucesiones de reordenaciones y el paso tercero para estimar las lagunas de las sumas parciales que quedan entre las sumas parciales de las subsucesiones convergentes de reordenaciones.

El teorema de Pechersky es útil en la prueba de la universalidad de la función ζ de Riemann (ver, por ejemplo, Steuding 2005 y Voronin 1975) en la franja del plano complejo $\frac{1}{2} < \Re(s) < 1$.

BIBLIOGRAFÍA

Apostol, T. M. (1967) *Calculus, Vol. I: One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*, 2nd ed. Blaisdell.

Apostol, T. M. (1974) *Mathematical Analysis*, 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley.

Apostol, T. M. (2012) *Modular functions and Dirichlet series in number theory*. Graduate Texts in Mathematics 41, Springer.

Bagemihl, F. y Erdős, P. (1954) Rearrangements of C_1-summable series. *Acta Math.* 92, 35–53.

Cauchy, A. L. (1833) *Oeuvres* (2) 10, 68–70.

Cowen, C. C., Davidson, K. R. y Kaufman, R. P. (1980) Rearranging the alternating harmonic series. *The Amer. Math. Monthly* 87, 817–819.

Dirichlet, P. G. L. (1837) Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschlaftichen Factor sind, unendliche viele Primzahlen enthalt. *Abhand. Ak. Wiss. Berlin* 1837, 45–81. En *Obras completas*, Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, I, 315–342.

Dvoretzky, A. y Rogers, C. A. (1950) Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 36, 192–197.

Dybskiy, Y y Slutsky, K. (2011) Riemann Rearrangement theorem for other types of convergence. *J. Mat. Anal. Appl.* 373, 605–613.

Groß, W. (1917) Bedingt konvergente Reihen. *Monatsh. Math. Phys.* 28, 221–237.

Lévy, P. (1905) Sur les séries semi-convergentes. *Nouvelles annales de mathématiques: Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale* 5, 506–511

Mahillo Cazorla, A. (2019) Sobre un teorema de reordenamiento de series de Lévy-Steinitz. *Trabajo fin de grado*, Universidad de La Rioja. https://investigacion.unirioja.es/documentos/5eda31d0299952715635a7ef

Mauldin, R. D. (ed.) (1981) *The Scottish book: mathematics from the Scottish Café*. Birkhauser.

Ohm, M. (1839) De nonnullis seriebus infinitis summandis. *Antritts-Programm zür Ubernahme der ordentlichen Professur*, Berlin.

Pietsch, A. (1972) *Nuclear locally convex spaces*, 2nd ed. Springer-Verlag.

Pringsheim, A. (1883) Ueber die Werthveranderungen bedingt convergenter Reihen und Producte. *Math. Ann.* 22, 455–503.

Riemann, B. (1854) Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. *Gesammelte Mathematische Werke*, 213–253 . Publicada por Richard Dedekind póstumamente en *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 13, 1867.

Romik, D. y Scherer, R. (preprint) Alternative summation orders for the Eisenstein series G_2 and Weierstrass -function. Aparecerá en *Rocky Mountain J. Math.* arXiv:1811.01523.

Rosenthal, P. (1987) The remarkable theorem of Lévy and Steinitz. *The Amer. Math. Monthly* 94, 342–351.

Schlömilch, O. X. (1873) Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschlaftichen Factor sind, unendliche viele Primzahlen enthalt. *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* 18, 520.

Sierpiński, W. F. (1911) Sur une propriété des séries qui ne sont pas absolument convergentes. *Bull. Intern. Acad. Sci. Cracovie* A, 149–158.

Steinitz, E. (1913) Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. *J. Reine. Angew. Math.* 143, 128–176.

Steuding, J. (2005) Universality of *L*-functions. Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen: *Seminars Winter Term* 2004/2005, Universitätsdrucke Göttingen, Göttingen, 81–92.

Voronin, S. M. (1975) Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function. *Math. USSR Izvestija* 9, No. 3, 443-453.

ZUBÍA

ISSN 0213-4306 Fechas de publicación: 2020-12-15
Las palabras que se citan aquí se pueden reproducir sin restricción alguna

CDU 582.47 (460.21)

RAFAEL FERNÁNDEZ ALDANA

La sabina albar (*Juniperus thurifera L.*) en La Rioja: nuevas citas y dinámica espacial

*Incense juniper (*Juniperus thurifera L.*) in La Rioja (Spain): new citations and spatial dynamics*

ZUBÍA, 2019-2020, 37-38, pp. 9-36

ABSTRACT: Known distribution area of incense juniper (Juniperus thurifera) in La Rioja (Spain) is enlarged with new citations that can be added to those of Arizaleta et al. (2007-2008). All these locations, the new ones and those already cited, have been inventoried registering the number of specimens, measuring some dasometric data (diameter, crown shape), recording the presence of cones and caracterizing the vegetation type. Based on this information, the abundance of the species in the region and the current dynamics of the species through its expansion and / or regeneration processes have been evaluated.

Key words: Juniperus thurifera, incense juniper, spatial dynamics, La Rioja

Palabras clave: *Juniperus thurifera*, sabina albar, dinámica espacial, La Rioja

CDU 634.8-2

FERNANDO MORENO, IGNACIO PÉREZ MORENO, VICENTE MARCO

Tablas de vida y parámetros poblacionales de *Trichogramma cacoeciae* y *T. brassicae* (Hymenoptera: Trichogrammatidae) sobre *Lobesia botrana* (Lepidoptera: Tortricidae): efecto de la alimentación

Life tables and population parameters of Trichogramma cacoeciae *and* T. brassicae *(Hymenoptera: Trichogrammatidae) on* Lobesia botrana *(Lepidoptera: Tortricidae): Effect of Food*

ZUBÍA, 2019-2020, 37-38, pp. 37-54

ABSTRACT: Life tables have been made for an autochthonous population of Trichogramma cacoeciae, and another commercially obtained population of T. brassicae using Lobesia botrana as host. In addition, the effect that the presence/absence of food (honey) exerted over the most relevant biological parameters for both populations and their intrinsic rate of increase (r_m) was assessed.

Food had a clear effect on longevity, total fecundity per female, emergence and development period of T. cacoeciae proving that fed individuals attained better values for these parameters. Regarding T. brassicae, only longevity was significantly affected by food. For species with identical food status, T. cacoeciae showed the best values, except for development period. Trichogramma cacoeciae also showed better population parameters than T. brassicae, resulting in higher r_m values both for fed individuals and food deprived ones.

Key words: Trichogramma, Lobesia botrana, *food influence, population parameters*

Palabras clave: *Trichogramma*, *Lobesia botrana*, ausencia de alimento, parámetros poblacionales

CDU 595.79
632

FERNANDO MORENO, IGNACIO PÉREZ MORENO, VICENTE MARCO

Preferencia del parasitoide *Trichogramma cacoeciae* (Hymenoptera: Trichogrammatidae) por huevos de diferentes huéspedes

Host preference of the parasitoid Trichogramma cacoeciae *(Hymenoptera: Trichogrammatidae) for eggs from different hosts*

ZUBÍA, 2019-2020, 37-38, pp. 55-68

ABSTRACT: The preference of Trichogramma cacoeciae Marchal for four hosts (Lobesia botrana Den. y Schiff., Ephestia kuehniella Zeller, Spodoptera exigua Hübner and Plodia interpunctella Hübner) was evaluated using no choice, paired-choice and multiple choice assays. The number of adults produced (in absolute or percentage terms) and the sex proportion of said progeny were used to measure preference. T. cacoeciae parasitized and developed in all four hosts. In general, E. kuehniella was the most parasitized species. On the contrary, S. exigua was the least attacked species. Sex proporción remained the same in all cases, thus rendering it useless as a measure of preference.

Key words: biological control*, host preference, Lobesia botrana, Trichogramma cacoeciae*

Palabras clave: control biológico*, Lobesia botrana*, preferencia de huésped, *Trichogramma cacoeciae*

CDU 565.7 (460.21)

IGNACIO PÉREZ MORENO

Los registros riojanos del catálogo de coleópteros ibéricos (Insecta: Coleoptera) de D. José María de la Fuente y Morales

The records from La Rioja of the catalogue of Iberian beetles (Insecta: Coleoptera) of D. José María de la Fuente y Morales

ZUBÍA, 2019-2020, 37-38, pp. 69-128

ABSTRACT: D. José María de la Fuente y Morales was one of the most renowned Spanish entomologists of the earliest 20th century. Among his outnumbered published studies, the catalogue of the Iberian beetles, published between the years 1918 and 1935, is the most prominent. In this paper, the species from La Rioja (northern Spain) registered in this catalogue have been compiled; their taxonomy has been updated; and the accuracy of the citation has been analized in accordance with the current knowledge we have about these insects group. Furthermore, from the 414 compiled, 30 species have been excluded, due to their distribution not being compatible with their presence in La Rioja. Likewise, as the presence of some of these species has not been cited from this region again since then, it requires to be confirmed.

Key words: Coleoptera, catalogue, La Rioja, Iberian Peninsula

Palabras clave: Coleoptera, catálogo, La Rioja, península ibérica

ZUBÍA

ISSN 0213-4306 Fechas de publicación: 2020-12-15
Las palabras que se citan aquí se pueden reproducir sin restricción alguna

CDU 517.5

MANUEL BELLO HERNÁNDEZ, ALEJANDRO MAHILLO CAZORLA

Teoremas de reordenamiento de series

Series Rearrangement Theorems

ZUBÍA, 2019-2020, 37-38, pp. 129-148

ABSTRACT: The sum of an infinite number of real numbers can depend on the arranging of these numbers. In this paper we will take you through several results about rearranging the terms of series; from series of real numbers to series in $\mathbb{R}^n$; even results about series in Banach spaces. We do not include proofs of theorems but only their main ideas.

First, we study the real numbers series case, in which we see the Rie- mann rearrangement theorem together with other results. We will continue with the Lévy-Steinitz theorem, an analogous result of Riemman's theorem for vector series in $\mathbb{R}^n$. In particular, we will consider the Eisenstein series defined in the complex field. Also, this series has the property that rearrange- ment in the order of summations results in a predictable change in the value of the series. This series is useful in the study of modular form. Finally, we show Pechersby's theorem on rearrangement of series in Hilbert spaces.

Key words: sequences, series, rearrangements of series, absolutely convergence, conditional convergence, unconditional convergence, summability, Banach space, Hilbert space

Palabras clave: sucesiones, series, reordenamiento de series, convergencia absoluta, convergencia condicional, convergencia incondicional, sumabilidad, espacio de Banach, espacio de Hilbert

CDU 51 Erdos, Paul
929 Erdos, Paul

MANUEL BELLO HERNÁNDEZ, MANUEL BENITO MUÑOZ, EMILIO FERNÁNDEZ MORAL

La conjetura de Erdős-Straus

Erdős-Straus' Conjecture

ZUBÍA, 2019-2020, 37-38, pp. 149-176

ABSTRACT: Paul Erdős and Ernst G. Straus conjectured in the late 1940s: Given a natural number $n \geq 2$ there are natural numbers x, y, z such that

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

This conjecture (ESC) is open today. Among other results, in this paper we study ESC, we establish some conjectures that offer sufficient conditions for the validity of ESC, we give an algorithm which, if it stops, breaks down the fraction $4/n$ as a sum of three Egyptian fractions, and, for example, we show that ESC holds for all the values of n in the range of the polynomial

$$p(a, b, c)=(a+1)(4b + 3)(4c+3)-(a+1)-(4b+3),$$

when the variables a, b, c take nonnegative integer values. We conjecture that the values n of this polynomial include all the prime numbers of the form $4q + 1$ $(q \geq 1)$, and we have done a computer-assisted verification of this fact for $n \leq 12 \times 10^{15}$. On the one hand we prove that the perfect squares do not belong to the image set of $(\mathbb{N} \cup \{0\})^3$ by the mapping p but, on the other, with the help of that polynomial we have been able to give a constructive demonstration that there are arbitrarily long sequences of consecutive numbers for which ESC is true.

Keywords: Vitis vinifera cv. Pinot Noir, latitudinal gradient, phenolic composition, solar radiation, ultraviolet radiation

Palabras clave: Conjetura de Erdős-Straus; ecuaciones diofánticas; fracciones egipcias

ZUBÍA
ISSN 0213-4306 Fechas de publicación: 2020-12-15
Las palabras que se citan aquí se pueden reproducir sin restricción alguna

CDU 617-581 (460.21)

JULEN MARTÍNEZ TORRES, ANA CORAL LAGA CUÉN, LOURDES FERREIRA LASO, CRISTINA LORENTE ÁLAVA, FÉLIX LOBATO SOLORES, IGNACIO PUYUELO JARNE, ÁNGEL ENRIQUE FRAILE JIMÉNEZ, OLGA LÓPEZ DEL MORAL LÓPEZ, MARÍA GOLVANO SARRIA, VÍCTOR MUNILLA PÉREZ

Tasa transfusional en cirugía de fractura de cadera en el hospital San Pedro. Estudio observacional descriptivo previo a la implantación de un protocolo de ahorro de sangre

Post-transfusion rate in hip fracture surgery in San Pedro`s hospital. An observational and descriptive study before blood saving protocol

ZUBÍA, 2019-2020, 37-38, pp. 177-186

ABSTRACT: Perioperative anemia is the major cause of morbidity and mortality in hip fractures. In 2016 a perioperative anemia protocol was established in San Pedro's hospital with the objective of early diagnosis and treatment. 167 patients with hip fracture were evaluated in an observational retrospective study in which main items were evaluated: age, sex, type of surgery, hemoglobin, blood transfusion, among others. We found no statistical differences among the type of surgery carried out and blood transfusion rate, but we found significant associations between preoperative hemoglobin and blood transfusion (70% patients with preoperative hemoglobin < 10g/dl, 33% with hemoglobin < 10-13 g/dl, 9.6% with hemoglobin 13-15 g/dl and no one with hemoglobin > 15 g/dl). The present study provides us with updated information about perioperative management of hip fracture patients in San Pedro´s hospital. Taking into account all cases of hip fracture evaluated in this study, blood transfusion rate is 26.4%. Bearing in mind the objectives of the perioperative anemia´s protocol, this new data may be useful to optimize preoperative measures in selected subgroups of patients.

Keywords: hip fractures, anemia, hemoglobin, blood transfusion, perioperative period

Palabras clave: fracturas de cadera, anemia, hemoglobina, transfusión sanguínea, perioperatorio

CDU 618 (460.21)

ANA CRISTINA RUIZ PEÑA, MARÍA JOSÉ PUENTE MARTÍNEZ, SARA ARRIETA BRETÓN, INÉS ESTEBAN DÍEZ, GERARDO RODRÍGUEZ MARTÍNEZ, CARLOTA CESTAFE CARO, CRISTINA FERNÁNDEZ GARCÍA

Factores asociados con los partos pretérmino menores de 32 semanas de gestación en el Hospital San Pedro de Logroño durante el año 2018: Relación clínica, microbiológica e histológica de los hallazgos placentarios

Factors related to preterm deliveries under 32 weeks at San Pedro's Hospital in Logroño during 2018: Clinical, microbiological and histological relation of placentary findings

ZUBÍA, 2019-2020, 37-38, pp. 187-204

ABSTRACT: Here we present a retrospective, descriptive and observational study performed with preterm births under 32 weeks at San Pedro's Hospital in Logroño during 2018 with the aim of analyzing the clinical, microbiological and histological relationship after examining the placentas and exposing the neonatal results according to the findings.

Seventeen deliveries were studied with 21 newborns (4 twin births) of the 1869 births that occurred in 2018, 0.90% of the total. There were 8 cases of chorioamnionitis and 2 cases of placental abruption. The variables most related to preterm births were maternal overweight and assisted reproduction treatments. The most important factors related to preterm birth were chorioamnionitis and placental abruption.

There is an important relation between clinical suspicion of chorioamnionitis and premature detachment of placenta normoinserta with placental histological and microbiological findings. It was the gestational age and the fetal weight at the time of birth the main determinants of the days of neonatal admission.

Key words: Preterm birth, risk factors, chorioamnionitis, histology, microbiology

Palabras clave: Parto pretérmino, factores de riesgo, corioamnionitis, histología, microbiología

ZUBÍA

ISSN 0213-4306 Fechas de publicación: 2020-12-15
Las palabras que se citan aquí se pueden reproducir sin restricción alguna

CDU 618.3-008.6-083 (460.21)

MARIANO LAGUNA OLMOS, CRISTINA FERNÁNDEZ GARCÍA, ANA CRISTINA RUIZ PEÑA, CARLOTA CESTAFE CARO, EDURNE ÁLVAREZ SUBERVIOLA, CRISTINA TEJADA LAMAS, OLIVIA LAFALLA BERNAD

Utilidad del ratio sflt-1/pigf en el cribado de preeclampsia precoz en la población gestante de La Rioja

Usefulness of the sFlt-1 / PIGF ratio in the early preclampsia screening across the pregnant population in La Rioja

ZUBÍA, 2019-2020, 37-38, pp. 205-218

ABSTRACT: Material and methods. Monocentric cohort study carried out between September 2018 and September 2019. The reference population of our study were all pregnant women in the Autonomous Community of La Rioja whose healthcare is centralized in San Pedro's Hospital. The target population were all pregnant women with a single gestation who were asymptomatic at the time of screening (morphologic ultrasound at 21st week) and in whom the mean of IP AUt was pathological (> 95th percentile for low-risk pregnant women repeatedly at 21st and 26th week or > 75th percentile for high-risk pregnant women at 21st week).

Results. 27 women met the inclusion criteria of our reference population (1896 pregnant women). From these 27 women, 22 of them presented a value of the ratio sFlt-1 / PIGF less than 38, showing a specificity and a negative predictive value of 88% and 100% respectively to dismiss preeclampsia, continuing a low-risk gestational control. Two pregnant women presented a ratio greater than 85 and both presented adverse events related to the placental insufficiency they suffered, premature detachment of the normal placenta and HELLP syndrome after fetal death. The risk factors for preeclampsia in the first trimester screening and the epidemiological characteristics of the patients with this condition were compared with those who did not develop the disease without finding statistically significant differences.

Conclusion. The implementation of a screening based on epidemiological factors in the first trimester together with the Doppler determination mean of IP AUt and the sFlt-1 / PIGF ratio in our population seems to be useful to dismiss early preeclampsia, since it has a high specificity and a negative predictive value, similar to those reported in the literature.

Keywords: Pre-eclampsia, Soluble fms-like tyrosine kinase 1/placental growth factor ratio, Uterine artery Doppler

Palabras clave: Preeclampsia, Tirosina-cinasa soluble de tipo FMS/Factor de crecimiento placentario, Doppler de las arterias uterinas

CDU 618089 : 611.018.3

IGNACIO PUYUELO JARNE, EDUARDO GALLINAS MARAÑA

Osteotomía peroné primaria. Un recurso a tener en cuenta en el enclavado endomedular por fractura diafisaria aislada de tibia

Primary fibula osteotomy. A surgery resource in the endomedullary nailing used in a tibia´s diaphyseal fracture

ZUBÍA, 2019-2020, 37-38, pp. 219-226

ABSTRACT: The tibia´s diaphyseal fractures management has always been the source of controversy due to the existence of a different surgical´s managements very similar and widely studied, such as: internal fixation with plates, external fixation, or as in our case, endomedullary nailing, reamed or not reamed, blocked or not blocked; seeking a final goal, which is none other than to allow the patient, an early recovery with an early load based on the least invasive surgery possible that minimizes bleeding and radiation exposure as much as possible.

In our case, we demonstrate the possibility of adding to the usual endomedullary nailing, a surgical option that has scientific evidence, which helps more if possible to consolidate the fracture.

Kew words: Diaphyseal fractures, tibia, endomedullary nailing, fibula osteotomy, fractures malunited

Palabras clave: Fracturas diafisarias, tibia, enclavado endomedular, osteotomía peroné, fracturas mal unidas

CDU 343.621 (460.21)

ANA CRISTINA RUIZ PEÑA, CARMINA SALVADOR BALLADA, CRISTINA FERNÁNDEZ GARCÍA, MARIANO LAGUNA OLMOS, Mª JOSÉ PUENTE MARTÍNEZ, JUANA HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ

Situación de las interrupciones voluntarias del embarazo en La Rioja en los últimos 5 años

Situation of voluntary interruptions of pregnancy in La Rioja in the last 5 years

ZUBÍA, 2019-2020, 37-38, pp. 227-236

ABSTRACT: The number of Voluntary Interruptions of Pregnancy in La Rioja has been significantly increased in recent years, which has a significant impact on both women's reproductive health and on the national economy, due to the cost involved. This fact should make us reflect on the need to design and implement more effective policies for the prevention of unwanted pregnancy, such as the design of strategic plans for sexual and reproductive education and facilitate the financing of all contraceptive methods.

Keywords: Voluntary interruption of pregnancy, Abortion, legal regulation

Palabras clave: Interrupción voluntaria del embarazo, Aborto, Regulación jurídica